

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1 (vzor)

FSV UK, ZS 2023-24

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^4 + 4n} - \sqrt[3]{n^3 + 3n}}{\sqrt[5]{n^5 + 1} - \sqrt[5]{n^5 + n}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3 - x)^{\frac{1}{\sin(\pi x/2)}}$$

(12 bodů)

3. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \cos\left(\sqrt[3]{(|x^2 - 4| - 1)^2}\right).$$

(13 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sin x - |\cos x|.$$

(a) Určete intervaly monotonie funkce f a nalezněte body maxima a minima.

(b) Určete intervaly, kde je f konvexní, a nalezněte její inflexní body.

(13 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 1. termín, 5. 1. 2024

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(\sqrt{n^2 + 2n} - n)$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{e^x - \cos x - x^2 - x}$$

(12 bodů)

3. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} & \text{pro } x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

(13 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sqrt{|\sin x|} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

(a) Nalezněte body maxima a minima funkce f , pokud existují.

(b) Určete obor hodnot funkce f .

(c) Existuje otevřený interval I obsahující bod $\frac{\pi}{2}$, na kterém je funkce f konvexní?

(13 bodů)

Výsledky

1. $-\frac{1}{2}$ 2. -1 3. $-\frac{1}{2}$ 4. (a) body maxima: $\frac{\pi}{3} + 4k\pi, \frac{11\pi}{3} + 4k\pi$ body minima: $\frac{5\pi}{3} + 4k\pi, \frac{7\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (b) $H(f) = \left\langle -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ (c) Neexistuje.

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 2. termín, 11. 1. 2024

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n \right).$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} \cos x - 1 - \sin \frac{x}{2}}{x^2}.$$

(12 bodů)

3. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \arcsin(\cos(x^2)).$$

(13 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

- (a) Nalezněte body maxima a minima funkce f na intervalu $[0, 2]$, pokud existují.
- (b) Rozhodněte, zda je f konkávní na intervalu $(0, 2)$.
- (c) Spočtěte asymptotu funkce v $-\infty$.

(13 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 3. termín, 23. 1. 2024

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((n^2 + n + 1)^3 - (n^3 + n^2 + 1)^2 \right) \cdot \left(\sqrt[3]{n^{15} + n^5 + 1} - \sqrt[3]{n^{15} + 1} \right).$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{\cos x})^{(\cotg^2(x))}.$$

(12 bodů)

3. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos x}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(13 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x+2}\right).$$

(a) Nalezněte intervaly monotonie f .

(b) Určete obor hodnot funkce f .

(b) Rozhodněte, zda je f konkávní na intervalu $[10, \infty)$.

(13 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 4. termín, 1. 2. 2024

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2^n + n + 1) \cdot \sin\left(n - \sqrt[3]{n^3 + n}\right)$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2 + x)^{\cotg(\pi x)}$$

(12 bodů)

3. Určete, v kterých bodech je funkce f spojitá, a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = (x - 1)^2 \cdot \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)$$

(13 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \arcsin(1 - \log^2 x).$$

- (a) Určete definiční obor funkce f .
- (b) Spočtěte první derivaci funkce f všude, kde existuje.
- (c) Nalezněte všechny inflexní body funkce f .

(13 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 5. termín, 13. 2. 2024

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + e^{2n})}{n^{3/2}} \cdot \cos n$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} + \frac{2 \log \cos x}{x^2}}{x^2}$$

(12 bodů)

3. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \arcsin x}{x^2}, & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(13 bodů)

4. Na intervalu $(-1, \infty)$ uvažujte funkci

$$f(x) = x \sqrt[3]{1 + x^3}.$$

- (a) Určete intervaly monotonie.
- (b) Nalezněte všechny extrémy funkce f na $(-1, \infty)$.
- (c) Nalezněte inflexní body funkce f v $(-1, \infty)$.

(13 bodů)